Kapitel 2

Grundläggande sannolikhetslära

Att beräkna en sannolikhet

I många slumpförsök gäller att alla utfall i S är lika sannolika.

Exempel: Tärningskast, slantsingling.

Om så är fallet kan vi bestämma sannolikheten för en händelse *A* genom att räkna utfall.

$$\Pr(A) = \frac{\text{Antal utfall i } A}{\text{Antal utfall i } S} = \frac{n_A}{N}$$

Det abstrakta problemet att bestämma Pr(A) har då överförts på det konkreta problemet att räkna utfall. För att i olika situationer kunna räkna utfall behöver vi känna till några *kombinatoriska* tekniker.

UPPSALA UNIVERSITET

Kombinatorik: Att räkna utfall

De för oss intressanta slumpförsöken är då vi ur en population ska dra ett antal individer. I sannolikhetsläran överförs detta problem på en sk *urnmodell*, dvs till att dra *r* bollar ur en urna som innehåller totalt *n* bollar.

För att veta vilken kombinatorisk teknik som ska användas för att bestämma på hur många sätt bollarna kan dras behöver vi besvara två frågor.

1. Är det dragning med eller utan återläggning?

2. Är det dragning med eller utan hänsyn till ordningen?

UPPSALA UNIVERSITET

Kombinatorik: *mn-regeln*

1. Dragning **med** återläggning, **med** hänsyn till ordningen.

$$N = n \cdot n \cdots n = n^r$$

Exempel: Hur många registreringsnummer till bilar finns det?

Vi ska dra tre bollar vardera ur en ”bokstavsurna” med $n_1=23$ bollar och en ”sifferurna” med $n_2=10$ bollar. Dragning sker *med* återläggning (samma bokstäver och siffror får förekomma fler gånger) och *med* hänsyn till ordningen (ABC123 skiljer sig från ACB123). Antal registreringsnummer är

$$N = n_1^{r_1} \cdot n_2^{r_2} = 23^3 \cdot 10^3 = 12\,167\,000$$

Permutationer och kombinationer

2. Dragning **utan** återläggning, **med** hänsyn till ordningen.

$$P_r^n$$

3. Dragning **utan** återläggning, **utan** hänsyn till ordningen.

$$C_r^n$$

UPPSALA UNIVERSITET

Uppgift 2.58 b

Antag att vi drar fem kort ur en vanlig kortlek. Vi är nu intresserade av *Pr(A)* där

A = De fem korten ger en ”kåk”, dvs en triss och ett par.

För att kunna beräkna *Pr(A)* måste vi räkna utfall, dvs ”pokerhänder”. Vi söker

n_A = Antal pokerhänder med en kåk

N = Antal pokerhänder (utan restriktioner)

Det är dragning *utan* återläggning, *utan* hänsyn till ordningen, dvs vi söker antal *kombinationer*.

UPPSALA UNIVERSITET

Uppgift 2.58 b

Av de 13 valörerna väljer vi ut 2 som ska utgöra kåken

Vilken av de 2 valda valörerna ska vara triss?

Av de valda valörernas fyra kort väljer vi ut tre respektive två kort.

Av de övriga 44 korten ska inget väljas.

$$\Pr(A) = \frac{\qquad}{\qquad}$$

Totalt ska vi av kortlekens 52 kort välja 5.

UPPSALA UNIVERSITET

Binomialkoefficienter

Termerna $\binom{n}{r}$

kallas ofta för *binomialkoefficienter* eftersom dom uppstår som

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

En binomialkoefficient anger i utvecklingen av $(a+b)^n$, (även kallad *binomial*) på hur många sätt man kan välja *r* stycken a'n (och därmed *n-r* b'n).

Distinkta (åtskiljbara) permutationer

Många gånger uppstår situationer då bollarna i urnan kan grupperas i bollar som är oskiljbara (vid olikfärgade bollar finns ett antal i samma färg)

Vi är då intresserade av att räkna antal distinkta (åtskiljbara) permutationer.

Det viktigaste specialfallet är att vi har bollar i två färger (exempelvis vita och svarta). Antal distinkta (åtskiljbara) permutationer som innehåller exakt *r* vita bollar är då

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

UPPSALA UNIVERSITET

Distinkta (åtskiljbara) permutationer

I det generella fallet har vi *k* olika typer av bollar i urnan. Antal distinkta (åtskiljbara) permutationer ges då av

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Dessa termer kallas ofta för *multinomialkoefficienter* eftersom dom uppstår i utvecklingen av en *multinomial*.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$$

Kombinatorik: Fall 4

4. Dragning **med** återläggning, **utan** hänsyn till ordningen.

Denna situation kan skrivas om och lösas mha distinkta permutationer. Betrakta en följd som innehåller *n-1* stycken ”/” och *r* stycken ”o”.

Exempelvis ska ”o/oo//” tolkas som att boll 1 valdes en gång, boll 2 valdes två gånger och att boll 3 inte valdes någon gång.

Eftersom vi i vår följd har två typer av objekt ges antal distinkta permutationer av .

$$C_r^{n-1+r} = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!r!} = \binom{n-1+r}{r}$$

Matematiskt verktyg: Geometriska serier

I sannolikhetsläran är vi ofta intresserade av att summera en oändlig följd av tal.

Av speciellt intresse är sk *geometriska serier* vilket är en summa (med oändligt antal termer) där termerna är på formen a^0, a^1, a^2,… och $|a| < 1$.

Det visar sig att denna serie kan skrivas på följande slutna form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad \text{där } |a| < 1$$

UPPSALA UNIVERSITET

Matematiskt verktyg: Geometriska serier (Bevis)

Bevis: Vi börjar med att studera en summa med ett ändligt antal termer. Låt *a* vara ett tal och *m* ett heltal. Vi låter då

$$S_m = a^0 + a^1 + \cdots + a^m$$

Lägger vi till ytterligare en term fås med motsvarande beteckning S_{m+1} och det är klart att

$$S_m = S_{m+1} - a^{m+1}$$

Vi kan dock även finna ett samband mellan S_m och S_{m+1} genom att multiplicera varje term i S_m med *a*.

$$a \cdot S_m = S_{m+1} - 1$$

UPPSALA UNIVERSITET

Matematiskt verktyg: Geometriska serier (Bevis)

Om vi nu tar differensen av dessa båda samband fås

$$S_m - a \cdot S_m = S_{m+1} - a^{m+1} - (S_{m+1} - 1)$$

vilket kan förenklas eftersom S_{m+1} försvinner ur högerledet.

$$(1-a) \cdot S_m = 1 - a^{m+1} \quad \text{dvs} \quad S_m = \sum_{k=0}^{m} a^k = \frac{1-a^{m+1}}{1-a}$$

Nu betraktar vi detta resultat för växande värde på *m*. Eftersom $|a| < 1$ följer att termerna a^{m+1} blir mindre och mindre ju större värde vi väljer på m. Vi drar slutsatsen att $a^{m+1} \to 0$ då $m \to \infty$ och saken är klar.

Uppgift 2.119 b

Experiment. Vi kastar två tärningar (och fortsätter med detta) tills sammanlagt antal ögon på de båda tärningarna är fyra eller sju.

Uppgift. Bestäm sannolikheten att vårt experiment avslutas med att sammanlagt antal ögon på de båda tärningarna är fyra.

Intressanta händelser är

A = *Sammanlagt antal ögon i det avslutande kastet är fyra*

A_k = *Det avslutande kastet är kast k och totalt antal ögon i detta kast är fyra*

B_k = *Sammanlagt antal ögon i kast k är fyra*

C_k = *Sammanlagt antal ögon i kast k är vare sig fyra eller sju*

Uppgift 2.119 b

Observation 1. För att finna *Pr(A)* använder vi att händelser associerade med olika kast är *oberoende* och att de flesta händelser associerade med samma kast är *disjunkta*.

Observation 2. I varje kast är det totalt 36 *lika sannolika* utfall.

Observation 3. I varje kast är det 3 utfall (13, 22, and 31) där sammanlagt antal ögon är 4, och 27 utfall där sammanlagt antal ögon vare sig är 4 eller 7.

Därmed följer att

$$\begin{aligned} \Pr(B_k) &= 1/12, \quad k = 1, 2, \ldots \\ \Pr(C_k) &= 3/4, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Uppgift 2.119 b

Utifrån de intressanta händelserna inses att

$$A_k = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{k-1} \cap B_k$$

och då dessa händelser associeras med olika kast är de oberoende, dvs

$$\Pr\left(A_k\right)$$

Vidare inses att

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

och eftersom A_k-händelserna är disjunkta följer slutligen att

$$\Pr\left(A\right) = \Pr\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$