C1 Sannolikhetslära och inferens II: Läsanvisningar (6e upplagan)

Kapitel 2

Föreläsning. Under föreläsningen fokuseras på de kombinatoriska metoderna i **avsnitt 2.6**. Läsanvisningar. Läs noga igenom avsnitt 2.6. Repetera övriga avsnitt vid behov.

Rekommenderade uppgifter.
2.58 (variation, ej 6e upplagan, se föreläsning Bild 6-7). Bestäm sannolikheten att få tvåpar då man slumpmässigt väljer fem kort ur en kortlek. Bestäm sannolikheten att få färg/svit/flush då man slumpmässigt väljer fem kort ur en kortlek (uppgift 2.124).
2.53. Något mer avancerad uppgift. För hjälp se Exempel 2.13.
2.55. För förståelse av hur binomialkoefficienterna fungerar. Lös uppgiften *både* verbalt och algebraiskt. Den verbala lösningen är mest elegant.
2.37. Enklare uppgift rörande distinkta permutationer.
2.149. Bra träning på den fjärde kombinatoriska räknemetoden. Se föreläsning Bild 11.
2.95b. Träning på geometriska serier. Se föreläsning för lösning av 2.95a (där kallad 2.119a).
2.116. En mer avancerad uppgift på temat med geometriska serier. Se föreläsning för lösning av 2.95a (där kallad 2.119a).

Kapitel 3

Föreläsning. **Avsnitt 3.1-3.2** tas upp mycket kortfattat. **Avsnitt 3.3** något mer ingående. Läsanvisningar. Läs noga igenom **Avsnitt 3.3**. Speciellt viktiga är satserna 3.3-3.6 för förståelse av hur man räknar med väntevärden.

Rekommenderade uppgifter.
Ny uppgift 1. För diskreta slumpvariabler som enbart kan anta positiva heltalsvärden finns ett alternativt sätt att beräkna väntevärdet. Då gäller nämligen att $E(X)=\sum Pr(X>k)$. Något klurig uppgift. *Hint*. Skriv ner den vanliga formeln för väntevärdet. Hur många gånger "förekommer" $Pr(X=k)$ i detta väntevärde?
3.23. Då den aktuella funktionen är en linjärfunktion blir beräkningarna av $E[u(X)]$ speciellt trevlig. Bevisa detta.
Föreläsning Bild 5. I Sats 3.6 ges ett bevis för en beräkningsformel för $V(X)$. Utför ett motsvarande bevis för den andra beräkningsformeln.

Avsnitt **3.4-3.8** behandlar vanligt förekommande diskreta slumpvariabler. Detta är i stor utsträckning en repetition av teorikurserna på A- och B-nivån.

Föreläsning. **Avsnitt 3.4** (Binomialfördelningen). Tas upp mycket kortfattat. Kortare

diskussion om hur sannolikhetsfunktionen får sitt utseende.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för hur sannolikhetsfunktionen får sitt utseende. Sats 3.7 ger beräkning av väntevärdet. Vi ska senare se att det finns enklare sätt att beräkna detta väntevärde men det är bra att lära sig den teknik som används i beviset. Tekniken är att skriva om en summand (och senare på liknande sätt en integrand) så att det blir en sannolikhetsfunktion (senare täthetsfunktion) varpå summan blir 1. Observera också att man vid beviset av variansen använder sig av den andra beräkningsformeln (Se Föreläsning Bild 5). För att se vad som komma skall (i Avsnitt 9.7) läses Exempel 3.10.

Rekommenderade uppgifter.
3.48. En generalisering av Exempel 3.10 och alltså en inblick i vad som kommer i Avsnitt 9.7.
3.49. En fortsättning av uppgift 3.64.

Föreläsning. **Avsnitt 3.5** (Geometrisk fördelning). Ingående bevis av väntevärdet. Vi löser uppgift **3.77** (ej 6e uppl).
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för hur sannolikhetsfunktionen får sitt utseende. Sats 3.8 ger den beräkning av väntevärdet som togs upp på föreläsningen. Se till att du får förståelse för detta. Det är viktigt att kunna deriveringsreglerna. Exempel 3.13 är motsvarigheten till Exempel 3.10.

Rekommenderade uppgifter.
3.55. Här ska du visa att den geometriska fördelningen inte har något ”minne”.
Ny uppgift 2. En naturlig fortsättning på uppgift 3.77 som löstes på föreläsningen (se Bild 11). Antag att vi vet att den första sexan kom i ett jämnt kast. Bestäm sannolikheten att det var i det fjärde kastet. (svar
3.67. På föreläsningen fann vi E(X). Uppgiften är nu att på liknande sätt beräkna V(X). Klurig uppgift. Följ instruktionerna.
3.68. En generalisering av Exempel 3.13 och alltså en inblick i vad som kommer i Avsnitt 9.7.

Föreläsning. **Avsnitt 3.6** (Negativ Binomialfördelning). Förklaring till utseendet på sannolikhetsfunktionen. Intuitiv förklaring av väntevärde och varians.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för hur sannolikhetsfunktionen får sitt utseende och även den intuitiva förklaringen av väntevärde och varians från föreläsningen.

Rekommenderade uppgifter.
3.83. Denna uppgift är precis som i de två föregående avsnitten en inblick i vad som kommer i Avsnitt 9.7.

Föreläsning. **Avsnitt 3.7** (Hypergeometrisk fördelning). Tas upp mycket kortfattat. Kortare diskussion om hur sannolikhetsfunktionen får sitt utseende. Kortare diskussion av sambandet med binomialfördelningen.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för hur sannolikhetsfunktionen får sitt utseende och även det (intuitiva) sambandet med binomialfördelningen. Det är också av intresse att jämföra väntevärde och varians med binomialfördelningen. Vad är skillnaden? Varför?

Rekommenderade uppgifter.
Ny uppgift 3. Dra slumpmässigt kort ur en vanlig kortlek. Bestäm sannolikheten att den *andra* kungen kommer som kort nummer fem. Detta är en motsvarighet till negativ binomialfördelning men med dragning utan återläggning, dvs en ”negativ hypergeometrisk fördelning”.
3.176c. Något klurig uppgift. Använd binomialutveckling och försök sedan matcha ihop identiska termer.
3.177. Använd resultatet i uppgift 3.176c. Vi använder sedan samma teknik som i beviset av Sats 3.7 (dvs motsvarande situation för binomialfördelningen).

Föreläsning. **Avsnitt 3.8** (Poissonfördelningen). Ingående beskrivning av hur sannolikhetsfunktionen får sitt utseende. Gränsvärdesbegreppet diskuteras vidare.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för hur sannolikhetsfunktionen får sitt utseende vilket inbegriper gränsvärdessambandet med binomialfördelningen. Studera beviset av väntevärdet. Det är samma teknik som vid tidigare väntevärdesberäkningar, dvs att skriva om summanden som en sannolikhetsfunktion. Lär dig denna teknik ordentligt.

Rekommenderade uppgifter.
3.110. Bestäm variansen för poissonfördelningen. Använd samma teknik som i beviset för väntevärdet.

Föreläsning. **Avsnitt 3.9** (Momentgenererande funktioner). Definition av moment, centralmoment och faktorialmoment. Ingående genomgång av momentgenererande funktion; definition, innebörd, egenskaper. För detta används bl a *Taylorutveckling*. Vi löser uppgifterna 3.115-3.119 och där används reglerna för derivering av en produkt och för en kvot samt *kedjeregeln*. Som avslutning studeras momentgenererande funktion för en linjärfunktion. Här löser vi uppgifterna 3.124 och 3.160 (ej 6e uppl).
Läsanvisningar. Detta är ett mycket viktigt avsnitt. Se till att du får förståelse för innebörden av en momentgenererande funktion. Se även till att du förstår hur momentgenererande funktioner kan användas. Dels (givetvis) till att generera moment men att huvuduppgiften är att karakterisera en sannolikhetsfördelning.

Rekommenderade uppgifter.
3.120.
Ny uppgift 4. Antag att Y har momentgenererande funktion $m(t)=\exp\{6(e^t-1)\}$.Vilken sannolikhetsfördelning har Y? Bestäm $Pr(|Y-\mu|\leq 2\sigma)$. Går det att använda tabellsamlingen för att lösa uppgiften?
3.123-3.125.
3.125. Använd det faktum att m(0)=1.
3.126-3.127. Här introduceras ytterligare en genererande funktion som visar sig vara speciellt användbar i samband med poissonfördelningen.

Föreläsning. **Avsnitt 3.10** (Sannolikhetsgenererande funktioner). Repetition av faktorialmoment. Ingående genomgång av sannolikhetsgenererande funktion; definition, innebörd, egenskaper. Vi löser första delen av uppgift 3.129.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för innebörden av en sannolikhetsgenererande funktion. Se även till att du förstår hur sannolikhetsgenererande funktioner kan användas, dvs till att generera faktorialmoment.

Rekommenderade uppgifter.
3.128. Bestäm sannolikhetsgenererande funktion för binomialfördelningen.
3.129. Använd det som visades under föreläsningen för att bestämma väntevärde och varians för poissonfördelningen.

Föreläsning. **Avsnitt 3.11** (Chebyshevs olikhet). Detta avsnitt tas inte upp på föreläsningen. Vi återkommer istället med motsvarande del i föreläsningen rörande kontinuerliga slumpvariabler i Kapitel 4.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för innebörden av Chebyshevs olikhet och dess användning för att uppskatta sannolikheter. Vi ska senare bevisa resultatet i föreläsning rörande kontinuerliga slumpvariabler i Kapitel 4.

Rekommenderade uppgifter.
3.131. Enklare uppgift angående användning av Chebyshevs olikhet.
3.137. Uppgift angående binomialfördelningen. Exakta sannolikhetsberäkningar och uppskattningar dels via normalfördelningsregeln och dels via Chebyshevs olikhet.

Kapitel 4

Föreläsning. **Avsnitt 4.1-4.3**. I avsnitt 4.2 introduceras definitionen av kontinuerlig slumpvariabel. Fördelningsfunktionens egenskaper tas upp. Täthetsfunktionen introduceras och sambandet med fördelningsfunktion diskuteras. I och med detta samband studeras de mest grundläggande primitiva funktionerna och de enklaste integrationsreglerna. Exempel på sannolikhetsberäkning via täthetsfunktion. I avsnitt 4.3 studeras väntevärden för kontinuerliga slumpvariabler. I och med att tekniken i stora delar är identisk med tillvägagångssättet för diskreta slumpvariabler är denna genomgång relativt kortfattad.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för innebörden av kontinuerlig slumpvariabel och sambandet mellan fördelningsfunktion och täthetsfunktion. Du bör även ha med dig de grundläggande primitiva funktioner och de enkla integrationsregler som togs upp på föreläsningen. Studera väntevärdesdefinitionen (4.4) och jämför med den för diskreta slumpvariabler och kontrollera att räknereglerna för väntevärden (Sats 4.5) inte ställer till några problem.

Rekommenderade uppgifter.
4.4. Enklare uppgift för att ”komma igång”

4.6. Något mer avancerad än 4.4.
4.9. Något mer avancerad än 4.4.
4.20. Bevisa väntevärdesreglerna för linjärkombinationer (det kontinuerliga fallet).
Försök kopiera de mer avancerade uppgifterna **4.34** och **4.35** ur den 7e upplagan. Bra träning.

Föreläsning. **Avsnitt 4.4** (Likformig fördelning). Kort genomgång av innebörd och utseende.
Läsanvisningar. Se till att du förstår innebörden. Studera gärna beviset för väntevärdet (Sats 4.6). Vi ska senare se ett viktigt användningsområdet för likformig fördelning.

Rekommenderade uppgifter.
4.31. Fortsättning på Sats 4.6. Något bökig med omskrivningar.
Ny uppgift 5. Bestäm medianen för en likformig fördelning på intervallet (θ_1,θ_2). Enklare uppgift. Mycket logiskt resultat.
Ny uppgift 6. En cirkel med radie r har arean $A=\pi r^2$. Antag att radien är likformigt fördelad på intervallet (0,1). Bestäm E(A) och V(A).

Föreläsning. **Avsnitt 4.5** (Normalfördelningen). Tas inte upp på föreläsningen.
Läsanvisningar. Det förutsätts att du från tidigare kurser är väl bekant med normalfördelningens egenskaper. Du ska även ha känsla för täthetsfunktionens utseende.

Rekommenderade uppgifter.
4.64. Resonera! Vad gäller för en kvadrat? Vad gäller för e^a där a är icke-positiv?
4.66. Låt X representera rektangelns area. Vilket samband har vi mellan X och Y?
4.160**. Här visas att normalfördelningen verkligen är en sannolikhetsfördelning. En riktigt svår nöt att knäcka. Enbart för den riktigt intresserade (och matematiskt bevandrade).

Föreläsning. **Avsnitt 4.6** (Gammafördelningen). Här görs en ingående genomgång av gammafamiljen. Först förklaras sambandet med poissonprocesser. Sedan bestäms täthetsfunktion för det enklaste specialfallet, den sk exponentialfördelningen. I samband med dessa beräkningar behandlas partialintegrering och några ofta förekommande gränsvärden i samband med generaliserade integraler. Sedan utvidgas resultatet för exponentialfördelningen till den allmänna täthetsfunktionen för gammafördelningen. Här bekantar vi oss även med gammafunktionen vilken kan tolkas som den kontinuerliga motsvarigheten till (det diskreta) fakultetsbegreppet. Som avslutning studeras χ^2-fördelningen som kanske är den viktigaste medlemmen av gammafamiljen.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för innebörden av täthetsfunktionen för gammafördelningen. Börja med exponentialfördelningen och utvidga (som på föreläsningen). Lös uppgifter med partialintegrering så att du får viss rutin på detta. Studera Exempel 4.10 för att få förståelse för att exponentialfördelningen saknar ”minne”.

Rekommenderade uppgifter.
4.72. Här är det tillräckligt att beräkna E(C).
4.75. Här finner vi ett samband mellan exponentialfördelningen och geometrisk fördelning.

4.76. Enklare uppgift för att få en känsla för χ^2-fördelningen. Hur många frihetsgrader har denna χ^2-fördelningen? Vad är väntevärde och standardavvikelse?
4.88. Enklare uppgift för att få en känsla för gammafördelningen.
4.89. Studera bevisföringen i Sats 4.8 för att lösa uppgiften.
4.90. En direkt fortsättning av uppgift 4.111. Använd samma teknik. Vi ska senare ha nytta av dessa resultat.
4.162. Svårare uppgift. Följ anvisningarna.

Föreläsning. **Avsnitt 4.7** (Betafördelningen). Förklaring av innebörden av betafördelningen och dess samband med gammafördelningen (och därmed med poissonprocesser). Genomgång av täthetsfunktionen och väntevärden. Vi bekantar oss även med betafunktionen. Som avslutning löser vi (första delen av) uppgift 4.98 för att visa en mycket vanlig teknik för att lösa integraler i sannolikhetsläran.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för innebörden av betafördelningen. Studera beviset till Sats 4.11 och den del av lösningen till uppgift 4.98 som presenterades på föreläsningen. Denna teknik att lösa integraler genom att skriva om integranden så att den blir en täthetsfunktion är mycket viktig.

Rekommenderade uppgifter.
4.91-4.93. Enklare uppgifter för att bekanta sig med betafördelningen.
4.98. Lös färdigt denna uppgift (som påbörjades under föreläsningen).
4.135. En generalisering av resultatet i uppgift 4.130.
4.163**. Här är uppgiften att visa (det påstådda) sambandet i betafunktionen. Detta är en mycket svår uppgift. Enbart för den riktigt intresserade (och matematiskt bevandrade).

Föreläsning. **Avsnitt 4.9** (Momentgenererande funktioner). Vi börjar med en repetition av moment och definierar sedan den momentgenererande funktionen. I och med att definition och egenskaper är identiska med dom för den diskreta motsvarigheten görs detta relativt kortfattat. Vi löser uppgift 4.104 (mgf för exponentialfördelningen) där vi åter tränar på tekniken att skriva om integranden som en täthetsfunktion. Sedan fokuseras på normalfördelningen. Vi bestämmer mgf och sedan löser vi uppgifterna 4.105 och 4.107 för att visa att varje linjärfunktion av en normalfördelad slumpvariabel också är normalfördelad.
Läsanvisningar. Detta är (i likhet med avsnitt 3.9) ett mycket viktigt avsnitt. Se till att du fördjupar din förståelse av momentgenererande funktioner och hur dom används. Efter att du tagit åt dig föreläsningen är Exempel 4.13 bra (men något svårt). Studera Sats 4.12 och efterföljande Exempel 4.16 för att förstå hur man kan beräkna momentgenererande funktion för en funktion av en slumpvariabel. Av vad som kommer längre fram är det viktigt att kunna arbeta med momentgenererande funktioner i samband med normalfördelningen.

Rekommenderade uppgifter.
Föreläsning Bild 42. Bestäm V(X).
Föreläsning Bild 43. Låt X vara $N(\mu,\sigma)$ och betrakta standardiseringen $Z=(X-\mu)/\sigma$. Visa att detta är en linjärfunktion och bestäm sedan den momentgenererande funktionen för Z.

4.108. Träning på att identifiera ”vanliga” sannolikhetsfördelningar via deras momentgenererande funktion.
4.109-4.110. Momentgenererande funktion för likformig fördelning.
4.111. Träning på att derivera.
4.112-4.113. Fortsatta övningar för att bekanta sig med momentgenererande funktioner.

Föreläsning. **Avsnitt 4.10** (Chebyshevs olikhet). Nu är det dags att ta upp Chebyshevs olikhet. Vi börjar med att gå igenom innebörden av olikheten och jämföra den med den empiriska regeln. Vi bevisar olikheten och som avslutning tillämpar vi den på exponentialfördelningen genom att lösa uppgift 4.118.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för innebörden av Chebyshevs olikhet och dess användning för att uppskatta sannolikheter. Se även till att du förstått beviset.

Rekommenderade uppgifter.
4.116. Tillämpa Chebyshevs olikhet på en kontinuerliga sannolikhetsfördelning
4.117. Tillämpa Chebyshevs olikhet på likformig sannolikhetsfördelning

Kapitel 5

Föreläsning. **Avsnitt 5.2**. Här introduceras nu begreppet *multivariat* slumpvariabel. Genomgående i kapitel 5 kommer detta att innebära *bivariat* slumpvariabel, dvs att vi studerar det simultana beteendet hos två univariata slumpvariabler. Vi börjar med att studera diskreta bivariata slumpvariabler och introducerar bivariat sannolikhetsfunktion. Vi löser sedan uppgift 5.3. Efter detta införs på motsvarande sätt bivariata kontinuerliga slumpvariabler via simultan fördelningsfunktion och simultan täthetsfunktion. Vi löser därefter uppgift 5.13.
Läsanvisningar. Att beräkna en sannolikhet för en bivariat slumpvariabel är att beräkna en dubbelsumma/integral. Detta är generellt klart besvärligare än att beräkna enkelsummor/integraler och behöver därför tränas på. Av förståelseskäl är det bra att hela tiden ha med sig något enkelt exempel. Använd förslagsvis Exempel 5.1 och den korstabell som där används för att beskriva den bivariata fördelningen. Se till att du ordentligt förstår hur man utifrån en sådan korstabell får en dubbelsumma. Denna förståelse utvidgas sedan till en dubbelintegral (som ju bara är den kontinuerliga motsvarigheten till en dubbelsumma). För att kunna lösa en dubbelintegral måste man först få grepp om integrationsområdet varför detta bör åskådliggöras grafiskt. Om detta är rektangulärt är det oftast inte några större problem att utföra beräkningen (se Exempel 5.3). Om området inte är rektangulärt måste man dock vara försiktig när man väljer integrationsgränser så att beräkningen blir korrekt. Se Exempel 5.4 och Uppgift 5.13 från föreläsningen (där omnämnd som 5.15).

Rekommenderade uppgifter.
5.7, 5.9-5.12. Bra träning på att beräkna sannolikheter i samband med bivariata slumpvariabler.

Föreläsning. **Avsnitt 5.3**. Här introduceras först begreppet *marginalfördelning*. Vi börjar med att studera den diskreta situationen genom att utgå från ett enkelt exempel med en korstabell. Efter att ha fått förståelse generaliseras koncepten till den kontinuerliga situationen. Vi löser sedan uppgift 5.19 a (vilket är en fortsättning på uppgift 5.3) och 5.29 a (vilket är en fortsättning på uppgift 5.13). Nu introduceras även begreppet *betingad sannolikhetsfördelning*. Återigen sker förklaringen först för den diskreta situationen via ett enkelt exempel med korstabell och sedan generaliseras till den kontinuerliga situationen. Som avslutning löses uppgifterna 5.29bc.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för innebörden av både marginalfördelning och betingad sannolikhetsfördelning. Lär dig definitionerna och gå noga igenom exemplen. Vid beräkning av marginalfördelning och betingad sannolikhetsfördelning uppstår många av dom problem som studerades i avsnitt 5.2. Se därför till att du tränar ordentligt på att utföra beräkningar i samband med dubbelsumma/integral.

Rekommenderade uppgifter.
5.19b, 5.25, 5.27, 5.28. Bra träning på att bestämma marginalfördelning och betingad sannolikhetsfördelning.
5.33-5.34. Något svårare uppgifter som är av intresse. Följ instruktionerna och använd förutsättningarna.
5.35*. Svårare uppgift där både binomialfördelning och betafördelning kan komma in i bilden.
5.36*. Svårare uppgift där gammafördelningen kommer med i beräkningen.

Föreläsning. **Avsnitt 5.4**. Här introduceras begreppet *oberoende slumpvariabler.* Efter definitionen visas hur man vanligtvis på enklaste sätt avgör huruvida två slumpvariabler är oberoende. Vi löser sedan via *inspektion* uppgifterna 5.41, (5.51, en uppgift enbart i 7e uppl) och 5.51. Då två slumpvariabler är oberoende förenklas beräkningarna. Vi löser uppgifterna 5.54 och 5.60.
Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för begreppet oberoende och dess samband med begreppen marginalfördelning och betingad sannolikhetsfördelning. Lär dig hur man avgör huruvida två slumpvariabler är oberoende (Sats 5.5).

Rekommenderade uppgifter.
5.43-5.53. Här är ett antal uppgifter där du via inspektion ska avgöra huruvida två slumpvariabler är oberoende. (Några av uppgifterna är redan lösta på föreläsningen.)
5.55. Beräkna en betingad sannolikhet där du utnyttjar att de båda variablerna är oberoende.
5.59. En typisk situation med oberoende slumpvariabler. Bra och viktig uppgift.
5.61. En uppgift i samma anda som uppgift 5.60 som löstes under föreläsningen (men då som uppgift 5.68).

Föreläsning. **Avsnitt 5.5-5.6**. Här studeras väntevärden för funktioner i samband med bivariata (och mer allmänt multivariata) slumpvariabler. Det visar sig att det enbart är en

direkt generalisering av motsvarande univariata beräkningar. Vi löser uppgift 5.67. Vi fortsätter med användbara räkneregler för väntevärden (Sats 5.6-5.8) och sedan det viktiga resultatet i Sats 5.9 rörande väntevärden för funktioner av oberoende slumpvariabler. Vi löser uppgift 5.69.
Läsanvisningar. Se till att du förstår definitionen (5.9). Studera exemplen. Se till att du förstår resultaten i avsnitt 5.6. Bra träning på räkning med väntevärden. För bättre förståelse kan det vara bra att använda ett enkelt diskret exempel med korstabell.

Rekommenderade uppgifter.
5.65. Standarduppgift. Bra träning.
5.71. Likheter med geometrisk fördelning. Kan det utnyttjas?
5.74*. Tuffare uppgift.
Ny uppgift 7. Antag att Y_1 och Y_2 är oberoende $\chi^2(v_1)$ respektive $\chi^2(v_2)$. **a**. Bestäm $E(Y_1+Y_2)$, **b**. Bestäm $V(Y_1+Y_2)$, Ledtråd: Använd Sats 5.9 och resultatet i uppgift 4.90a. Viktig uppgift.

Föreläsning. **Avsnitt 5.7**. Här studeras *kovarians* och *korrelation* vilket är två mått på styrkan hos (det linjära) sambandet mellan två slumpvariabler. Vi studerar definition, beräkningsteknik och kopplingen till begreppet oberoende. Vi löser uppgift 5.79.
Läsanvisningar. Se till att du förstår definitionen (5.10) och beräkningstekniken (Sats 5.10). Du ska även förstå skillnaden mellan begreppen ”oberoende” och ”okorrelerade”. Studera exemplen. Åter kan det vara bra att använda ett enkelt diskret exempel med korstabell.

Rekommenderade uppgifter.
5.77 och 5.78. grundläggande uppgifter angående kovarians.
5.80. Kovarians mellan linjärkombinationer.
5.82-5.83. Mer uppgifter för förståelse av kovariansbegreppet.

Föreläsning. **Avsnitt 5.8**. I statistiska sammanhang är det av stort intresse att studera hur de allmänna räknereglerna för väntevärden överförs på linjärkombinationer. Här studeras (kortfattat) hur man i en allmän situation utifrån de ingående slumpvariablernas väntevärden och varianser kan bestämma väntevärde och varians för linjärkombinationer.

Läsanvisningar. Det är bra träning att själv ordentligt ta sig an beviset för Sats 5.12b. I och med att variansen för en linjärkombination kan bestämmas via varianserna för de ingående slumpvariablerna och deras inbördes kovarianser har vi här ett viktigt användningsområde för kovarianser.

Vad händer med beräkningen då slumpvariablerna är oberoende? Då gäller att variansen för en linjärkombination helt kan bestämmas utifrån de ingående slumpvariablernas varianser (och vikter i linjärkombinationen). Se de mycket viktiga exemplen 5.27 och 5.28.

Överkurs. Sats 5.12c ger att kovariansen mellan två linjärkombinationer kan beräknas utifrån kovariansberäkningar mellan de ingående slumpvariablerna. Detta kan vara användbart i viss besvärlig bevisföring (se exempel 5.29)

Rekommenderade uppgifter.
5.87. Enklare ”uppvärmning”.
5.89. Genom att använda tidigare beräkningar och resultat blir också detta en enkel uppgift.
5.92. Något bökigare uppgift. På slutet används med fördel Tchebyshevs olikhet.
5.94. Genom att använda tidigare beräkningar och resultat bör inte detta innebära några större problem.
5.97*. Besvärligare uppgift. Något att bita i.

Föreläsning. **Avsnitt 5.9**. Eftersom binomialfördelningen är en mycket användbar sannolikhetsfördelning är det av intresse att studera dess multivariata motsvarighet, dvs den sk *multinomialfördelningen*. Här ges en kortfattad genomgång av definition och grundläggande egenskaper.

Läsanvisningar. Se till att du får förståelse för sannolikhetsfunktionen. Det kan vara på sin plats och gå tillbaka och repetera innebörden av *multinomialkoefficienten* (se avsnitt 2.6). Studera Sats 5.13. Beviset är intressant men får betraktas som överkurs.

Rekommenderade uppgifter.
5.99-5.101.

Föreläsning. **Avsnitt 5.10**. Eftersom normalfördelningen är den viktigaste av alla sannolikhetsfördelningar är det av intresse att studera dess multivariata motsvarighet. I och med dess komplexitet nöjer vi oss med att ytligt studera utseendet på den bivariata normalfördelningen. Vi konstaterar att ”okorrelerade” och ”oberoende” är likvärdiga uttryck vid multivariat normalfördelning.

Läsanvisningar. Försök att få en ”känsla” för den bivariata täthetsfunktionen.

Rekommenderade uppgifter.
5.111 a. Här visas påståendet att ”okorrelerade” och ”oberoende” är likvärdiga uttryck vid multivariat normalfördelning.

Föreläsning. **Avsnitt 5.11**. Här börjar vi med att studera sk *hierarkiska modeller*, dvs modeller där sannolikhetsfördelningen för X beror på någon parameter θ, där θ i sin tur kan betraktas som en slumpvariabel. Vi studerar hur man i dessa situationer kan bestämma marginalfördelningen för X genom att lösa uppgift 5.36. Ofta är man dock intresserad av att finna denna marginalfördelning enbart i syfte att bestämma E(X) och V(X). Det visar sig då finnas en genväg via *betingade väntevärden*. För att belysa löses uppgift 5.116 (som är en fortsättning på 5.36).

Läsanvisningar. Se till att du får ordentlig förståelse för innebörden av betingade väntevärden. Fortsätt sedan på detta spår för att få förståelse för hur dessa betingade väntevärden kan betraktas som slumpvariabler. En följd av detta är de användbara resultaten i Sats 5.14 och 5.15. Studera bevisen. Avsnittet avslutas med en diskussion angående hierarkiska modeller. Detta läses noga!

Rekommenderade uppgifter.
5.113, **5.115**, **5.118**. Ett antal uppgifter att träna på i samband med hierarkiska modeller där uppgiften är att bestämma (obetingat) väntevärde och varians.
5.119*. Mer avancerad uppgift i samma anda.

Kapitel 6

Läsanvisningar. **Avsnitt 6.1-6.2**. Här ges en introduktion och en översikt över de tre metoder som används för att bestämma sannolikhetsfördelningen för en funktion av en multivariat slumpvariabel.

Föreläsning. **Avsnitt 6.3**. Vi löser uppgifterna 6.4, (6.7 endast uppl 7), 6.8a och 6.13bc.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
6.5. Enklare uppgift i samma anda som uppgift 6.4 (se föreläsning).
6.7. Uppgifter i samma anda som uppgift 6.8 (se föreläsning).
6.9. Uppgift rörande exponentialfördelningen.
6.11, 6.12, 6.14. Uppgifter i samma anda som uppgift 6.13 (se föreläsning).

Föreläsning. **Avsnitt 6.4**. Vi löser uppgiften 6.30a.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
6.22-6.25. Bra uppgifter för träning av transformationstekniken.
6.27. Här fortsätter man med situationen i uppgift 5.69 (se föreläsning kap 5).
6.32. Här fortsätter man med situationen i uppgift 6.30 (se föreläsning).

Föreläsning. **Avsnitt 6.5**. Vi löser uppgiften 6.40, 6.49, 6.50a.
Läsanvisningar. Ett mycket viktigt avsnitt som studeras noggrant.

Rekommenderade uppgifter.
Här dräller det av nyttiga uppgifter så i princip alla rekommenderas.
6.34. En viktig fortsättning av uppgift 6.7 (7e uppl, se föreläsning).
6.43.
6.44-6.46.
6.51.
6.52. En något lurigare uppgift men mycket bra vad det gäller att förstå normalfördelningens egenskaper.

Föreläsning. **Avsnitt 6.7**. Detta avsnitt behandlar ”order statistics”. Vi nöjer oss med att studera $X_{(1)}$ och $X_{(n)}$ och löser uppgiften 6.60b.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
6.60.
6.65.

Kapitel 7

Föreläsning. **Avsnitt 7.1**. Här ges en introduktion till kapitlet.

Föreläsning. **Avsnitt 7.2**. Här studeras samplingfördelningar då den bakomliggande populationen förutsätts vara normalfördelad. Vi studerar ingående samplingfördelningarna för stickprovsmedelvärde och stickprovsvarians. Speciellt ges ett utförligt bevis av Sats 7.3. Vi tar även upp definition och innebörd av t- och F-fördelningarna.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
7.7. Enklare uppgift angående linjärkombinationer av oberoende normalfördelade slumpvariabler. Mycket viktigt resultat.
7.10. Uppgift rörande χ^2-fördelningen. I a-uppgiften används med fördel momentgenererande funktioner.
7.13. Enklare uppgift rörande F-fördelningens egenskaper.
7.14. Något lurigare uppgift där man ska beräkna väntevärde och varians för t-fördelningen. Under föreläsningen på Kapitel 5 användes resultatet i Sats 5.9 för att lösa uppgift 5.81. Samma teknik kan användas här.
7.15. Visa sambandet mellan t- och F-fördelningen. Utgå från definitionerna.
7.16a. Något lurigare uppgift där man ska beräkna väntevärde för F-fördelningen. Se ledtrådar för uppgift 7.30 ovan.
7.21. En för statistiken viktig uppgift. Uppgiften är mer kämpig än svår.
7.72*-7.73*. Tuffare uppgifter där det gäller att finna täthetsfunktionerna för t- och F-fördelningarna. Lite att bita i. Använd metoden via fördelningsfunktionen.

Föreläsning. **Avsnitt 7.3**. Här ges en snabb genomgång av Centrala gränsvärdessatsen. Vi nämner begreppet konvergens i fördelning.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
7.71a. Använd det vi vet om χ^2-fördelningen.

Föreläsning. **Avsnitt 7.4**. Beviset för Centrala gränsvärdessatsen *är frivilligt*. Istället för detta bevis studeras uppgift 7.78* som är liknande och är ett bevis för sambandet mellan binomialfördelningen och poissonfördelningen. I detta bevis används resultatet i Sats 7.5. Läsanvisningar. Frivillig läsning.

Rekommenderade uppgifter.
Beviset för Centrala gränsvärdessatsen*.
7.74*. Visa att Poissonfördelningen uppfyller kraven för Centrala gränsvärdessatsen.

Kapitel 8

Föreläsning. **Avsnitt 8.1-8.2**. Här repeteras de grundläggande begrepp som hör till skattning. Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
Här finns det gott om bra uppgifter att träna på.
8.1. Bra uppgift rörande sambandet mellan de grundläggande begreppen
8.2. Uppgift som handlar om att skapa en ny skattare som en sammanvägning av två befintliga skattare. b-uppgiften är bra som träning på optimering.
8.4. Studerar några tänkbara skattare i samband med exponentialfördelningen.
8.6. Hur finner vi väntevärdesriktiga/förväntningsriktiga skattare i samband med poissonfördelningen.
8.9. Bra uppgift rörande binomialfördelningen för att förstå innebörden av n-1 i nämnaren då man beräknar stickprovsstandardavvikelsen.
8.10ab. Bra träning i att bestämma skattare av typen max.
8.12. Visa att stickprovsstandardavvikelsen S inte är en väntevärdesriktig/förväntningsriktig skattare av σ.
8.14. Bra träning i att bestämma skattare av typen min.
8.16*. Något lurigare, men fullt möjlig, uppgift.

Föreläsning. **Avsnitt 8.5**. Här studeras hur man i allmänhet konstruerar ett konfidensintervall för någon parameter θ. Speciellt studeras metoden via *pivotkvantitet*. Vi löser uppgift 8.39. Läsanvisningar. Det är viktigt att man har förståelse för hur man via en pivotkvantitet konstruerar konfidensintervall.

Rekommenderade uppgifter.
Även här finns det gott om bra uppgifter att träna på.
8.35.
8.37.
8.40.

Kapitel 9

Föreläsning. **Avsnitt 9.2**. Här studeras begreppet *relativ effektivitet*. Vidare inför vi begreppet (*absolut*) *effektivitet* via uppgift 9.8a.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
9.1. Uppvärmning.
9.4. Något bökig uppgift som kan ses som en fortsättning på Exempel 9.1. För att bestämma egenskaper hos Y(1) görs förslagsvis variabelbytet $w=y/\theta$ och sedan finns en koppling till betafördelningen.
9.5. Bra uppgift rörande normalfördelningen (och χ2-fördelningen).
9.7. Fortsättning på uppgift 9.1.
9.8b. Något lurigare uppgift. Se lösningen på 9.8a från föreläsningen.

Föreläsning. **Avsnitt 9.3**. Här studeras *konsistens* och i samband med detta införs begreppet *konvergens i sannolikhet*. Vi åskådliggör begreppet genom att lösa uppgift 9.20. Det visar sig finnas en behändig metod för att undersöka konsistens hos väntevärdesriktiga skattare (Sats 9.1). För att jämföra parametervärden i olika populationer används ofta differenser och kvoter av punktskattare. Av denna anledning är Sats 9.2 viktig då man ska undersöka konsistens hos sådana skattare. Vidare gäller att *Slutskys Sats* (Sats 9.3) är ett viktigt resultat för inferens i praktiken. Vi löser uppgift 9.14 och 9.28.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
9.9. Om man har löst uppgift 9.3 är detta en enkel användning av Sats 9.1.
9.11. Enkelt men viktigt resultat av Sats 9.2.
9.12. Fortsättning på uppgift 9.17 och uppgift 8.129. Använd Sats 9.2.
9.13. Använd Sats 9.1
9.18. Vad gäller för summan av kvadrerade oberoende N(0,1). Använd sedan Sats 9.1.
9.21-9.23. Uppgifter i samma anda som 9.26.
9.25. Sats 9.1.
9.27. Dubbel användning av Sats 9.2

Föreläsning. **Avsnitt 9.4**. En punktskattare sammanfattar den information som finns i ett stickprov rörande en okänd parameter θ. Om en skattare (i viss mening) innehåller all information från stickprovet gällande θ sägs den vara en *uttömmande skattare* (*sufficient estimator*) av θ. Vi formaliserar begreppet uttömmande skattare via betingade sannolikheter och inför den sk *Likelihoodfunktionen* L(θ). För att i en given situation kunna avgöra hur en uttömmande skattare ska konstrueras finns det viktiga resultatet i *faktoriseringssatsen* (Sats 9.4). För att belysa löses uppgift 9.30a. (Detta resultat kan sedan generaliseras för att se hur man kan konstruera uttömmande skattare simultant för två eller flera parametrar.) Då definitionsområdet beror på den aktuella parametern kan man ha nytta av att använda sk indikatorfunktioner. För att åskådliggöra löses uppgift 9.41.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
9.29. Här används faktoriseringssatsen för att bekräfta resultatet i avsnittets inledande exempel.
9.30bc. Fortsättning på uppgift 9.30 som löstes på föreläsningen. För c-uppgiften måste man använda den mycket naturliga utvidgningen av Sats 9.4.
9.31-9.36. Standarduppgifter för användning av Sats 9.4.
9.37. Här introduceras den sk *exponentialfamiljen*. En mängd olika sannolikhetsfördelningar kan skrivas på denna form. I den här uppgiften visas att man för medlemmar av exponentialfamiljen direkt kan finna uttömmande skattare.
9.38-9.39. Det visar sig att fördelningarna i uppgifterna 9.35 och 9.36 båda är medlemmar av exponentialfamiljen. Använd resultatet i uppgift 9.37 för att finna uttömmande skattare. För den avslutande slutsatsen bör man tänka på att en 1-till-1 funktion av en uttömmande skattare också är en uttömmande skattare.
9.43-9.45. Här studeras några situationer då definitionsområdet beror på den aktuella parametern. För att kunna använda Sats 9.4 används indikatorfunktioner. Se lösningen för uppgift 9.41 från föreläsningen.

Föreläsning. **Avsnitt 9.5**. Vi är ofta intresserade av att studera väntevärdesriktiga skattare. Den väntevärdesriktiga skattare som har den minsta osäkerheten/variansen sägs vara MVUE (Minimum Variance Unbiased Estimator) och är i detta avseende den bästa tänkbara skattaren av θ. Vi börjar med det viktiga resultatet av *Rao-Blackwell* (Sats 9.5) som innebär att en MVUE alltid är en funktion av den *minsta uttömmande skattaren*. För alla situationer på den här kursen är den uttömmande skattare som fås via faktoriseringssatsen (Sats 9.4) en minsta uttömmande skattare. Det är dock inte alltid denna är en väntevärdesriktig skattare av θ men den kan då göras om till en sådan som därmed är MVUE. För att belysa löses uppgift 9.53 som är en fortsättning på uppgift 9.41 och Exempel 9.1. Detta angreppssätt kan sedan även användas för att finna en MVUE för någon funktion $g(\theta)$ vilket åskådliggörs via uppgift 9.56a.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
9.48-9.50. Standarduppgifter där vi använder att vi redan har funnit den minsta uttömmande skattaren.
9.51. Använd samma teknik som ovan där du utnyttjar det vi kommit fram till i uppgift 9.31.
9.52. Något längre och krångligare uppgift där vi utnyttjar resultatet i uppgift 9.37.
9.54-9.55. Uppgifter som i princip är identiska med uppgift 9.53 från föreläsningen. Skillnaden är att vi inte har hjälp av Exempel 1 utan måste utföra dessa beräkningar.

Föreläsning. **Avsnitt 9.6**. Här presenteras den sk *momentmetoden* vilket är en metod för att finna punktskattare. Typiskt för de flesta sannolikhetsfördelningar är att momenten beror på fördelningens parametrar och tanken är därför att skatta momentet av ordning k med motsvarande stickprovsmoment. Detta ger konsistenta skattare som i de flesta fall är enkla att bestämma. Nackdelen är att skattarna ofta inte är effektiva, dvs de är inte någon funktion av

en uttömmande skattare. Vi löser uppgift 9.61.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
9.64.
9.65.
9.66.
9.70.

Föreläsning. **Avsnitt 9.7**. Här presenteras den sk *maximum-likelihoodmetoden* (*ML-metoden*) vilket precis som momentmetoden är en metod för att finna punktskattare. Vi kan via likelihoodfunktionen $L(\theta)$ studera sannolikheten/tätheten för stickprovet för olika värden på θ. Som punktskattning använder vi det värde på θ som maximerar $L(\theta)$. Oftast är det dock enklare att finna det värde som maximerar $\ln L(\theta)$ vilket ger samma resultat eftersom funktionen ln är strängt växande. Det visar sig att ML-skattare har en hel del trevliga egenskaper som gör detta till en mycket bra skattningsmetod. Vi belyser genom att lösa uppgifterna 9.74 och 9.75.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
9.72-9.73. Standarduppgifter för att bestämma ML-skattare.
9.76-9.77. Successiv generalisering av resultatet i uppgift 9.73.
9.80. Här beräknas ML-skattaren för den situation där vi bestämde momentskattaren i uppgift 9.61 (se föreläsning).
9.83-9.85. Något besvärligare uppgifter som dock förenklas avsevärt om man sett lösningen till uppgift 9.75 (se föreläsning).
9.86*. Bevis för invariansegenskapen hos ML-skattare (för strängt monotona funktioner).
9.88. Använd invariansegenskapen hos ML-skattare.

Kapitel 10

Föreläsning. **Avsnitt 10.2**. Repetition av beståndsdelarna i ett hypotestest och grundläggande begrepp. Vi studerar ett enkelt hypotestest i samband med normalfördelningen.
Läsanvisningar.

Föreläsning. **Avsnitt 10.10**. Testets styrka, bästa kritiska område och Neyman-Pearsons lemma. MP-test och UMP-test. För att åskådliggöra löser vi uppgift 10.89 samt Uppgift 4 från tentamen 20100424.
Läsanvisningar.

Rekommenderade uppgifter.
10.82. Bestäm MP-test i samband med variansen för en normalfördelning.
10.83. Bestäm MP-test i samband med gammafördelningen. Vad gäller för en summa av

oberoende gammafördelade slumpvariabler? Hur kan en allmän gammafördelning modifieras så att det blir en χ^2-fördelad slumpvariabel? Se uppgift 6.40.
10.87. Bestäm MP-test i samband med poissonfördelningen.
10.90. Bestäm MP-test i samband med binomialfördelningen.
10.91. Bestäm MP-test i samband med U(0,θ). Använd indikatorfunktion. Använd resultatet i uppgift 6.74.

Extra PowerPoint (frivillig). **Avsnitt 10.11**. Här generaliseras metoden från avsnitt 10.10 till att gälla en mer allmän hypotesprövningssituation. Detta leder fram till sk *Likelihoodkvottest* (LR-test). För att illustrera metoden löser vi en något modifierad version av Exempel 10.24.
Läsanvisningar. Exempel 10.24.

Rekommenderade uppgifter.
10.93. Detta är en naturlig fortsättning av situationen i Exempel 10.24. Den är något bökig.

Svar till rekommenderade jämna uppgifter

2.58 (7e uppl). (Minst) tvåpar: 198/4165. (Minst) färg/flush/svit: 33/16660
2.116. 244/495 (≈0.493)

Ny uppgift 2. 275/1296
Ny uppgift 3. 0.016
3.120. Ge(0.3)
Ny uppgift 4. 0.94
3.124. **a**. E(Y)=5/3, V(Y)=10/9, **b**. E(Y)=2, V(Y)=2, **c**. E(Y)=2, V(Y)=2
3.128. $(pt+q)^n$

4.4. **a**. k=6, **b**. 0.648, **c**. 0.648, **d**. 0.393, **e**. 0.393
4.6. **b**. 0.597, **c**. $2ye^{-y^2}$, **d**. $e^{-4}=0.018$, **e**. 0.356
Ny uppgift 5. $(\theta_1+\theta_2)/2$
Ny uppgift 6. $E(A)=\pi/3$, $V(A)=4\pi^2/45$
4.66. $E(A)=3(\mu^2+\sigma^2)$.
4.72. E(C)=1100.
4.76. k=1/96, 8 fg, $\mu=8$, $\sigma=4$
4.88. E(Y)=1.5, V(Y)=0.75.
4.92. 0.8208
4.108. **a**. Ga(2,4), **b**. Exp(3.2), **c**. $N(-5,\sqrt{12})$.
4.110. **a**. $(e^t-1)/t$, **b**. $(e^{at}-1)/(at)$, **c**. $(1-e^{-at})/(at)$, **d**. $(e^{(a+b)t}- e^{bt})/(at)$.
4.112. **a**. $k=1/\sqrt{(2\pi)}$, **b**. $\exp(t^2/2)$, **c**. E(Y)=0, V(Y)=1.
4.116. 0.962

5.10. **a**. k=7/8, **b**. 1/2.
5.12. **a**. k=1, **b**. 1/32.
5.74. **a**. $E(W)=0$, $V(W)=1/(\nu_1-2)$, **b**. $E(U)= \nu_1/(\nu_2-2)$, $V(U)= 2\nu_1(\nu_1+ \nu_2-2)/[(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)]$.
Ny uppgift 7. **a**. $E(Y_1+Y_2)= \nu_1+ \nu_2$, **b**. $V(Y_1+Y_2)=2(\nu_1+ \nu_2)$.
5.78. $Cov(Y_1,Y_2)=1/40$. Y_1 och Y_2 är beroende.
5.80. **a**. $Cov(U_1,U_2)= V(Y_1)-V(Y_2)$, **b**. $\rho=[V(Y_1)-V(Y_2)]/[V(Y_1)+V(Y_2)]$, **c**. Då $V(Y_1)=V(Y_2)$.
5.92. **a**. $E(Y_1-Y_2)=1$, **b**. $V(Y_1-Y_2)=1$.
5.94. **a**. E(C)=66, **b**. V(C)=96.
5.100. **a**. $E(C)=np_1+3np_2$, **b**. $V(C)=np_1q_1+9np_2q_2-6np_1p_2$.
5.118. **a**. $E(Y)=\alpha\beta$, **b**. $\sigma(Y)=\sqrt{[\alpha\beta(1+\beta)]}$.

6.12. G(U)=b/(1-U).
6.14. **a**. $f(y)=\alpha\beta^\alpha/y^{\alpha+1}$, $y\geq\beta$, **b**. $G(U)=\beta/(1-U)^{1/\alpha}$.
6.22. **a**. U är Exp(α), **b**. $E(Y^k)=\Gamma(k/m+1)\alpha^{k/m}$.
6.60. **a**. $F(u)=(u/\theta)^n$, **b**. $f(u)=nu^{n-1}/\theta^n$, **c**. $E(Y_{(n)})=n\theta/(n+1)$, $V(Y_{(n)})=n\theta^2/[(n+1)^2(n+2)]$.

7.10. $E(U)=\nu$, $V(U)=2\nu$, **b**. $E(S^2)=\sigma^2$, $V(S^2)=2\sigma^4/(n-1)$.

8.2. **b**. $a=\sigma_2^2/(\sigma_1^2+ \sigma_2^2)$.
8.4. **a**. Alla utom θ_4, **b**. θ_5.

8.6. **a**. Medelvärdet, **c**. Y*(4-1/n+Y*) där Y*=Medelvärdet.
8.10. Låt θ* vara θ-hat. **b**. [(nα+1)/nα]θ*.
8.12. **b**. $S\{\Gamma[(n-1)/2]\sqrt{(n-1)}\}/\{\Gamma(n/2)\sqrt{(2)}\}$.
8.14. $(n+1)Y_{(1)}$.
8.16. **a**. 4X/π, **b**. $16W/\pi^2$.
8.40. **c**. $Y/[1-\sqrt{(0.1)}]$.

9.18. **a**. $\chi^2(n)$, **b**. Ja, 1.
9.48. $(1/n)\Sigma(Y_i-\mu)^2$.
9.50. $(1/n)\Sigma Y_i^2$.
9.52. **e**. $(n-1)/\Sigma W_i$.
9.54. $Y_{(1)}-1/n$.
9.64. Y-streck respektive $[(n-1)/n]S^2$.
9.66. **a**. 3Y-streck, **b**. Nej.
9.70. Y*/(3-Y*) där Y*=Medelvärdet.
9.80. $-n/\Sigma \ln Y_i-1$.
9.84. **a**. $Y_{(n)}$, **b**. $Y_{(n)}/\theta$, **c**. $[Y_{(n)}/(1-\alpha/2)^{1/(3n)}, Y_{(n)}/(\alpha/2)^{1/(3n)}]$.