PRELIMINÄRA LÖSNINGSFÖRSLAG Sannolikhetslära och inferensteori II, C1 (7.5 hp).

1. (a) Vi utnyttjar att Exp(4)=Gamma(4,1) och $\chi^2(1)$=Gamma(1/2,2). Den momentgenererande funktionen för gammanfördelningen ges i Ex 4.13. Därifrån får vi att

$$m_X(t) = (1-4t)^{-1} \qquad \text{och} \qquad m_Y(t) = (1-2t)^{-1/2}.$$

Oberoendet ger att

$$m_W(t) = m_X(t/2)m_Y(t) = (1-4t/2)^{-1}(1-2t)^{-1/2} = (1-2t)^{-3/2},$$

vilket är den momentgenererande funktionen för Gamma(3/2,2)=$\chi^2(3)$-fördelningen.

2. Derivering ger att $f(t) = \alpha t^{\alpha-1}$, vilket är täthetsfunktionen för $Beta(\alpha, 1)$-fördelningen.

(a) Likelihoodfunktionen är $L(\alpha) = \alpha^n \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha-1}$. Loglikelihoodfunktionen är $l(\alpha) = n\ln\alpha + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \ln y_i$, med derivata $l'(\alpha) = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \ln y_i$. För att finna ML-skattningen löser vi ekvationen $l'(\alpha) = 0$, vilket ger $\hat{\alpha}_{ML} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln y_i}$. Att detta verkligen är ett maximum ses genom att $l''(\hat{\alpha}_{ML}) = -\frac{n}{\hat{\alpha}_{ML}^2} < 0$.

(b) Låt $u = \sum_{i=1}^n \ln y_i$. Likelihoodfunktionen kan skrivas som

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \alpha^n \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha-1} = \alpha^n \Big(\prod_{i=1}^n y_i\Big)^{\alpha-1} \\ &= \alpha^n \Big(e^{\sum_{i=1}^n \ln y_i}\Big)^{\alpha-1} = \alpha^n \Big(e^u\Big)^{\alpha-1} \cdot 1, \end{aligned}$$

så faktoriseringssatsen ger att u är uttömmande. ML-skattaren $\hat{\alpha}_{ML} = -n/u$ är därmed en funktion av en uttömmande statistika.

(c) Vi har att

$$E(Y^k) = \alpha \int_0^1 t^{k+\alpha-1} dt = \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Tag nu exempelvis $k = 1$. En skattning fås via momentmetoden genom att lösa

$$\bar{y} = E(Y) = \frac{\hat{\alpha}}{1+\hat{\alpha}},$$

som har lösningen $\hat{\alpha} = \frac{\bar{y}}{1+\bar{y}}$.

3. (a) Vi konstaterar först att

$$E(X \mid N = n) = np$$

vilket innebär att $E(X \mid N) = Np$. Därmed följer av Sats 5.14 att

$$E(X) = E[E(X \mid N)] = E(Np) = pE(N) = \lambda p$$

(b) Vi vill visa att X är $Po(\lambda p)$. Vi använder sambandet mellan marginal-, simultan- och betingade fördelningar och får att

$$p_Y(x) = \sum_{n=x}^{\infty} p_{Y,N}(x,n) = \sum_{n=x}^{\infty} p_{Y|N=n}(x)\, p_N(n) = \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

Vi har en idé om att lösa denna summa genom att använda oss av sannolikhetsfunktion för någon medlem av Poissonfamiljen. Vi har dock ett problem med summationsområdet samt att vi i nuläget inte vet vilken medlem av poissonfamiljen vi ska arbeta med. Vi börjar med att flxtta allt som inte beror på n utanför summan.

$$p_X(x) = \frac{p^x (1-p)^{-x} e^{-\lambda}}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^n}{(n-x)!}$$

och därmed ser vi att det ska vara $Po(\lambda(1-p))$ som ska användas. För att få rätt summationsområde gör vi först variabelbytet $m = n - x$. För att vi sedan ska få rätt utseende på summanden för vi in den multiplikativa konstanten $e^{-\lambda(1-p)}$ vilket leder till att

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \frac{p^x (1-p)^{-x} e^{-\lambda}}{x!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{m+x}}{m!} = \\
&= \frac{p^x (1-p)^{-x} [\lambda(1-p)]^x e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)}}{x!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^m e^{-\lambda(1-p)}}{m!} = \\
&= \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

och saken är klar.

4. (a) Neyman–Pearsons lemma ger att det starkaste testet av

$$H_0: p = 0.5 \qquad \text{mot} \qquad H_a: p = p_a,\ p_a < 0.5$$

ges av området

$$\{y : L(0.5)/L(p_a) < k\}$$

där värdet på k bestäms av α.
Här innebär det att

$$\frac{L(0.5)}{L(p_a)} = \frac{\binom{20}{y} 0.5^y 0.5^{20-y}}{\binom{20}{y} p_a^y (1-p_a)^{20-y}} = \frac{0.5^{20}}{p_a^y (1-p_a)^{20-y}} < k.$$

Vi logaritmerar och får att

$$20 \ln 0.5 - y \ln p_a - (20-y) \ln(1-p_a) < \ln k,$$

vilket efter omskrivningar ger att det bästa kritiska området ges av

$$y < \frac{20 \ln 0.5 - \ln k + 20 \ln(1-p_a)}{\ln p_a + ln(1-p_a)} = k',$$

där k' bestäms av α. Området beroende inte på p_a, vilket gör att testet är likformigt starkast.

(b) Vi har att

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(H_0 \text{ förkastas} | \theta = 5) =& \mathrm{P}(X \leq 1 | \theta = 5) + \mathrm{P}(X = 2 | \theta = 5) \cdot \frac{0.05 - \mathrm{P}(X \leq 1 | \theta = 5)}{\mathrm{P}(X = 2 | \theta = 5)} \\
=& \mathrm{P}(X \leq 1 | \theta = 5) + \mathrm{P}(X = 2 | \theta = 5) + 0.05 - \mathrm{P}(X \leq 1 | \theta = 5) \\
=& 0.05.
\end{aligned}$$